数学物理方程笔记*

黄 晨†

2019 年 12 月

目录

*基于华中科技大学胡勇教授 2019 年秋季数学物理方法课堂教学内容整理。

†Email: physchenhuang@gmail.com

1 数学物理定解问题

1.1 数学物理方程的导出与分类

1.1.1 波动方程 (双曲型方程)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = f$$

1.1.2 热传导方程（抛物型方程）

热传导的 Fourier 定律：$\mathbf{q} = -k\nabla u$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\nabla^2 u = f$$

1.1.3 反映稳定状态的方程 (椭圆型方程)

- Poisson 方程

$$\nabla^2 u = f$$

- Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0$$

- Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0$$

1.2 定解条件

1.2.1 初始条件

初始条件总的原则是：它应该完全描写初始时刻 $t = 0$ 时介质内部及边界上任意一点的状况。

1.2.2 边界条件

边界条件的总的原则是: 它应该完全描写边界上各点在任一时刻 $(t \geq 0)$ 的状况。

- 第一类边界条件: 给出边界上各点的函数值

$$u|_{\Sigma} = \phi(\Sigma, t)$$

- 第二类边界条件: 给出边界上各点函数的法向微商值

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\Sigma} = f(\Sigma, t)$$

- 第三类边界条件: 给出边界上各点的函数值与法向微商值之间的线性关系

$$\left.\left(u + H\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\right|_{\Sigma} = f(\Sigma, t)$$

线性边界条件在物理上绝不是必然的，黑体辐射的边界条件就是非线性的，在那里出现了温度的四次方。

1.2.3 连接条件

连接条件是边界条件的特殊表现: 如果在区域的内部出现了结构上的跃变，那么，在这些跃变点 (或者线、面) 上微分方程也不能成立，这时候我们还需要补充以相应的连接条件。

1.2.4 定解问题的适定性

- 解的**存在**性：定解问题有解。解条件过多，互相矛盾，则定解问题无解。
- 解的**唯一**性：定解问题的解是唯一的。定解条件不足，定解问题的解就不止一个。
- 解的**稳定**性：如果定解问题中的已知条件 (例如方程或定解条件中的已知函数) 有微小改变时，解也只有微小的改变。一个不加证明的结论是，线性偏微分方程的解通常是稳定的，非线性偏微分方程的解常常会出现不稳定性。

2 线性偏微分方程的通解

2.1 线性偏微分方程解的叠加性

方程类型	方程	线性算符 $\mathbf{L}$
波动方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\nabla^2 u=f$	$\mathbf{L}\equiv\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\nabla^2$
热传导方程	$\frac{\partial u}{\partial t}-\kappa\nabla^2 u=f$	$\mathbf{L}\equiv\frac{\partial}{\partial t}-\kappa\nabla^2$
Poisson 方程	$\nabla^2 u=f$	$\mathbf{L}\equiv\nabla^2$

以上线性偏微分方程可以统一写成

$$\mathbf{L}[u]=f$$

其中 u 是未知函数，$\mathbf{L}$ 是线性算符，f 是已知函数，被称为方程的非齐次项，如果 $f=0$，方程就被称为齐次方程。

线性性质体现在

$$\mathbf{L}\left[\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2\right]=\alpha_1\mathbf{L}\left[u_1\right]+\alpha_2\mathbf{L}\left[u_2\right]$$

2.2 常系数线性偏微分方程的通解

$$A_0\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-1}\partial y}+\cdots+A_n\frac{\partial^n u}{\partial y^n}=0$$

引入简写符号 $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$，将方程写为

$$\mathbf{L}\left(D_x,D_y\right)=A_0\left(D_x-\alpha_1 D_y\right)\left(D_x-\alpha_2 D_y\right)\cdots\left(D_x-\alpha_n D_y\right)$$

- 如果这个方程的 n 个解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 互不相等，那么相应的常系数线性齐次偏微分方程的通解为

$$u=\phi_1\left(y+\alpha_1 x\right)+\phi_2\left(y+\alpha_2 x\right)+\cdots+\phi_n\left(y+\alpha_n x\right)$$

- 若 α 为 2 重根，即 $(D_x-\alpha D_y)^2u=0$，则通解为

$$u=x\phi_1(y+\alpha x)+\phi_2(y+\alpha x)$$

- 若 α 为 n 重根，即 $(D_x-\alpha D_y)^n u=0$，则通解为

$$u=x^{n-1}\phi_1(y+\alpha x)+x^{n-2}\phi_2(y+\alpha x)+\cdots+x\phi_{n-1}(y+\alpha x)+\phi_n(y+\alpha x)$$

例：波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

解：令 $u=\phi(y+\alpha x)$，相应的有 $\alpha^2-a^2=0\Rightarrow\alpha=\pm a$，故通解为

$$u=\phi_1(y+ax)+\phi_2(y-ax)$$

2.3 波动方程的行波解

2.3.1 d'Alembert 公式

波动方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

通解:

$$u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$$

- 这个解式表明波动方程的通解由两个波组成。
- $f(x-at)$ 代表沿 x 轴向右传播的波，当 $t=0$ 时，波形为 $f(x)$，而后以恒定速率 a 向右传播，而保持波形不变。
- $g(x+at)$ 代表沿 x 轴向左传播的波，当 $t=0$ 时，波形为 $g(x)$，而后也以同样的恒定速率 a 向左传播，而保持波形不变。
- 它们独立传播，互不干扰，这正是因为波动方程是线性齐次方程，它的解具有可叠加性。
- 函数 f 和 g 应该由定解条件确定。如果把问题简化为一维无界弦上的波的传播问题，那么边界条件就是不必要的，f 和 g 可以完全由初始条件决定。

例: **一维无界弦的振动**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,t)\Big|_{t=0} = \phi(x) & -\infty < x < \infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

将通解 $u(x,t) = f(x-at) + g(x+at)$ 代入初始条件，得

$$f(x) + g(x) = \phi(x) \qquad f'(x) - g'(x) = -\frac{1}{a}\psi(x)$$

将第二式积分，可得

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + C$$

将两个结果联立，可得

$$f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{C}{2}$$
$$g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{C}{2}$$

波动方程定解问题的 d'Alembert 解:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-at) + \phi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

2.3.2 固定端点问题

例：**半无限长的弦的振动**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \infty \quad t > 0 \\ u(x,t)|_{t=0} = \phi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & 0 \le x < \infty \\ u(x,t)|_{x=0} = 0 & t \ge 0 \qquad \text{端点固定不动} \end{cases}$$

在振动的过程中，$x = 0$ 这个点必须保持不动。如果位移函数 $u(x, t)$ 是关于空间的奇函数，这一条件就可以满足。

把初始条件扩展成奇函数：

$$u(x,t)|_{t=0} = \Phi(x) = \begin{cases} \phi(x) & 0 \le x < \infty \\ -\phi(-x) & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & 0 \le x < \infty \\ -\psi(-x) & -\infty < x < 0 \end{cases}$$

根据

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x-at) + \Phi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

则相应的解为：

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[\phi(x+at) + \phi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & 0 < t \le \frac{x}{a} \\ \frac{1}{2}[\phi(x+at) - \phi(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi & t > \frac{x}{a} \end{cases}$$

2.4 热传导方程与 Laplace 方程的定性讨论

2.4.1 热传导的解

例：**一维无穷长介质上的热传导过程**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u|_{t=0} = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty$$

运用 Fourier 变换的办法，我们似乎可以写出它如下的解

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{-\kappa k^2 t}e^{ikx}\mathrm{d}k$$

其中

$$A(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ikx}\mathrm{d}x$$

2.4.2 三维 Laplace 方程

三维 Laplace 方程 $\nabla^2 u(x, y, z) = 0$ 的解被称为三维调和函数。它的多项式独立解可以按照自变量的齐次函数进行归类：

- 常数（0 次齐次式）
- 一次函数（一次齐次式）

$$x + iy, \quad x{-}iy, \quad z$$

- 二次函数的独立解有五个，可取为

$$2z^2-x^2-y^2, \quad (x\pm iy)z, \quad x^2-y^2\pm 2ixy$$

- 三次函数的独立解有七个，可取为

$$2z^3-x^3-y^3, \quad (x^2-y^2\pm 2ixy)z, \quad (x\pm iy)^3$$

- 一般地，l 次函数的独立解有 $2l+1$ 个

3 分离变量法

偏微分方程定解问题最常用的、适用范围最广的解法是**分离变量法**，其基本思路是通过分离变量将偏微分方程转化为常微分方程求解。

从理论上讲，分离变量法的成功取决于本征值问题的以下性质:

- 本征值问题一定有解
- 本征函数的全体是完备的
- 本征函数一定具有正交性

3.1 齐次偏微分方程的分离变量

3.1.1 两端固定弦的自由振动

例: **两端固定弦的自由振动**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = 0, & u|_{x=l} = 0, & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = \phi(x), & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

1. **分离变量**

   所谓分离变量法，是指我们希望求得具有分离变量形式的特解:

   $$u(x,t) = X(x)T(t)$$

   将特解代入方程即得

   $$\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

   函数 $X(x)$ 满足的常微分方程和边界条件

   $$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$$

   以及 $T(t)$ 满足的常微分方程

   $$T^{''}(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

2. **求解本征值问题**

   $X(x)$ 满足的常微分方程

   $$X^{''}(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(0) = X(l) = 0$$

   - 函数 $X(x)$ 在这一对齐次边界条件限制下的常微分方程定解问题，被称为本征值问题。
   - λ 的允许取值就被称为**本征值**，相应的非零解被称为**本征函数**。
   - 这里的本征值和本征函数，可以被理解为就是线性微分算子 $\mathbf{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 的本征值和本征矢量。

   并非对于任何 λ，方程都有既满足齐次常微分方程，又满足齐次边界条件的非零解 $X(x)$

   - $\lambda = 0$ 的情形 (退化)
     微分方程的通解为 $X(x) = A_0 x + B_0$
     边界条件 $\Rightarrow$ $A_0 = 0 \quad B_0 = 0$
     $\lambda = 0$ 时只有零解，即 $\lambda = 0$ 不是本征值。

- $\lambda \neq 0$ 的情形 (非退化)
  微分方程的通解为 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$
  边界条件 $\Rightarrow$ $B = 0$ $\quad A\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = n\pi$
  本征值
  $$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$
  线性无关的本征函数
  $$X_n(x) = \sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

3. **求特解并叠加出一般解**

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{1}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

对于每一个本征值 λ_n，再求解方程

$$T''(t) + \lambda_n a^2 T(t) = 0$$

可以求出相应的 $T_n(t)$:

$$T_n(t) = C_n \sin\frac{n\pi}{l}at + D_n\cos\frac{n\pi}{l}at$$

因此也就得到了同时满足齐次波动方程和齐次边界条件的具有分离变量形式的特解

$$u_n(t) = \left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at + D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

由于偏微分方程和边界条件都是齐次的，我们就把全部无穷多个特解叠加起来得到一般解:

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\sin\frac{n\pi}{l}at + D_n\cos\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

4. **利用本征函数正交性定叠加系数**

将一般解 $u(x, t)$ 代入初始条件

$$u|_{t=0} = \phi(x) \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x)$$

得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi}{l}x = \phi(x) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} C_n\frac{n\pi a}{1}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x)$$

根据对应不同本征值的本征函数的正交性

$$\int_0^l X_n^*(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\delta_{nm}$$

得到

$$D_n = \frac{2}{l}\int_0^l \phi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \qquad C_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x$$

3.1.2 矩形区域内的稳定问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 & 0 < x < a, 0 < y < b \\ u|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0 & 0 \le y \le b \\ u|_{y=0} = f(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0 & 0 \le x \le a \end{cases}$$

1. **分离变量**

   仍用分离变量法求解，令

$$u(x,y) = X(x)Y(y)$$

   代入方程，分离变量，即得

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

   由此我们得到了两个常微分方程

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad Y''(y) - \lambda Y(y) = 0$$

   代入关于 x 的一对齐次边界条件，得到

$$X(0) = 0 \qquad X'(a) = 0$$

   这样，我们就又得到了一个本征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad X(0) = 0 \qquad X'(a) = 0$$

2. **求解本征值问题**

   - 若 $\lambda = 0$，则 $X(x) = A_0x + B_0$

     边界条件 $\Rightarrow$ $A_0 = 0 \quad B_0 = 0$

     $\lambda = 0$ 只有零解，即 $\lambda = 0$ 不是本征值。

   - 若 $\lambda \neq 0$，微分方程的通解为 $X(x) = A\sin\sqrt{\lambda}x + B\cos\sqrt{\lambda}x$

     代入齐次边界条件，得到 $B = 0 \quad A \neq 0 \quad \cos\sqrt{\lambda}a = 0$

     本征值

$$\lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2 \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

     本征函数

$$X_n(x) = \sin\frac{2n+1}{2a}\pi x \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

   $Y(y)$ 满足的方程是

$$Y_n''(y) - \lambda_n Y_n(y) = 0 \qquad \lambda_n = \left(\frac{2n+1}{2a}\pi\right)^2 \qquad n = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

   其解为

$$Y_n(y) = C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y$$

   于是就得到了的既满足 Laplace 方程，又满足 (x 方向上的) 齐次边界条件的特解

$$u_n(x,y) = \left(C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x$$

   将这无穷多个特解全部叠加起来，就得到了一般解

$$u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(C_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi y + D_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi y\right)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x$$

3. **定叠加系数**

代入关于 y 的非齐次边界条件

$$u|_{y=0}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x=f(x)$$

求得

$$D_n=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x\mathrm{d}x$$

同理

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2a}\pi\left(C_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b+D_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b\right)\sin\frac{2n+1}{2a}\pi x=0$$

有

$$C_n\cosh\frac{2n+1}{2a}\pi b+D_n\sinh\frac{2n+1}{2a}\pi b=0$$

D_n 既已求得，上式便给出了 C_n。

这个问题是稳定问题，与时间 t 无关，因此不出现初始条件 (在这里必须区分边界条件和初始条件的差别)。我们的策略是，用**齐次边界条件构成本征值问题**，用**非齐次边界条件定叠加系数**。

齐次偏微分方程和齐次边界条件在分离变量法中起着关键作用: 因为方程和边界条件是齐次的，分离变量才得以实现。

3.2 非齐次偏微分方程的分离变量

3.2.1 两端固定弦的受迫振动

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t) & 0<x<l,t>0\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0 & t\geq 0\\ u|_{t=0}=0,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 & 0\leq x\leq l\end{cases}$$

中心思想：寻找一组**完备本征函数组** $\{X_n(x),n=1,2,3,\cdots\}$，将解 $u(x,t)$ 以及非齐次项 $f(x,t)$ **按此本征函数组展开**:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)\qquad f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)X_n(x)$$

关于 $\{X_n(x)\}$ 的选取，最方便的做法是选择 $\{X_n(x)\}$ 为相应齐次定解问题的本征函数，即由相应**齐次偏微分方程**和**齐次边界条件**给出:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & 0<x<l,t>0\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0 & t\geq 0\end{cases}$$

分离变量得到本征值问题

$$X_n''(x)+\lambda_n X_n(x)=0,\quad X_n(0)=0,\quad X_n(l)=0$$

将展开式代入偏微分方程

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)X_n(x)$$

利用 $\{X_n(x)\}$ 满足的常微分方程，可化为:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)X_n(x)+a^2\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)X_n(x)$$

根据本征函数的正交性，$T_n(t)$ 应满足

$$T_n''(t)+\lambda_n a^2 T_n(t)=g_n(t)$$

将 $u(x,t)$ 展开式代入初始条件，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)X_n(x)=0 \qquad \sum_{n=1}^{\infty}T_n'(0)X_n(x)=0$$

即

$$T_n(0)=0 \qquad T_n'(0)=0$$

利用 Laplace 变换，可以求出

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t g_n(\tau)\sin\frac{n\pi}{l}a(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

总结：按相应齐次问题本征函数展开

- 优点: 具有一定的普遍性，适用范围广。
- 依据: 齐次边界条件给出正交完备的本征函数集。
- 不足: 往往给出一个形式十分复杂的级数解。

3.2.2 非齐次稳定问题

例：**Poisson 方程的第一类边值问题**

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y) & 0<x<a,0<y<b\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=a}=0 & 0\le y\le b\\ u|_{y=0}=0,\quad u|_{y=b}=0 & 0\le x\le a\end{cases}$$

按相应齐次问题本征函数展开。

这里的两组边界条件都是齐次的，我们可以任意选择一组来得到完备的本征函数组。由于 x 与 y 的边界条件均为其次的，这里采用更进一步的做法，即将 $u(x,y)$ 和 $f(x,y)$ 同时既按本征函数 $\{X_n(x)\}$，又按本征函数 $\{Y_m(y)\}$ 展开为**二重级数**：

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

将展开式代入方程，即得

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}c_{nm}\left[\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2\right]\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}d_{nm}\sin\frac{n\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y$$

比较系数得

$$c_{nm}=-\frac{d_{nm}}{(\frac{n\pi}{a})^2+(\frac{m\pi}{b})^2}$$

3.3 非齐次边界条件的齐次化

为什么**边界条件必须是齐次的**?

根本原因：**齐次边界条件所导致的本征函数的正交完备性**，从而实现对方程的解和非齐次项的分解。

例：**非齐次边界条件下的波动方程**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & 0 < x < l, t > 0 \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = v(t) & t \geq 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

为了应用分离变量法，只有先将非齐次边界条件齐次化。令

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

对 $v(x,t)$ 的唯一要求是它要抵消掉非齐次边界条件：

$$v|_{x=0} = \mu(t), \quad v|_{x=l} = v(t)$$

那么 $w(x,t)$ 一定满足其次边界条件：

$$w|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0$$

则有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) \\ w|_{x=0} = 0, \qquad w|_{x=l} = 0 \\ w|_{t=0} = -v|_{t=0}, \quad \left.\dfrac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} \end{cases}$$

4 正交曲面坐标系

4.1 正交曲面坐标系

- 二维直角坐标系下 Laplace 算符的形式

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

- 极坐标系下 Laplace 算符的形式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

- 柱坐标系下 Laplace 算符的形式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

- 球坐标系下 Laplace 算符的形式

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

4.2 圆形区域内的 Laplace 方程第一类边界问题

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, & 0<\phi<2\pi, 0<r<a \\ u(r,\phi)|_{\phi=0} = u(r,\phi)|_{\phi=2\pi}, & 0<r<a \\ \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}|_{\phi=0} = \frac{\partial u(r,\phi)}{\partial \phi}|_{\phi=2\pi}, & 0<r<a \\ u(r,\phi)|_{r=0}\text{有界，}\; u|_{r=a} = f(\phi), & 0<\phi<2\pi \end{cases}$$

1. **分离变量**

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R = 0 \qquad \frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \lambda\phi = 0$$

由周期性条件可得：

$$\Phi(0) = \Phi(2\pi) \qquad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

2. **求解本征值问题**

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi(0) = \Phi(2\pi), \quad \Phi'(0) = \Phi'(2\pi)$$

- 当 $\lambda = 0$ 时，通解为

$$\Phi_0(\phi) = A_0\phi + B_0$$

代入周期性边界条件可得

$$A_0 = 0, \quad B_0 \text{ 任意}$$

$\lambda = 0$ 是本征值，相应的非零本征函数是 $\Phi_0(\phi) = 1$

- 当 $\lambda \neq 0$ 时，通解为

$$\Phi(\phi) = A\sin\sqrt{\lambda}\phi + B\cos\sqrt{\lambda}\phi$$

代入周期性边界条件，有

$$B = A\sin\sqrt{\lambda}2\pi + B\cos\sqrt{\lambda}2\pi \qquad A = A\cos\sqrt{\lambda}2\pi - B\sin\sqrt{\lambda}2\pi$$

将上式视为关于系数 A 和 B 的线性齐次代数方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式

$$\begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda}2\pi & \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 \\ \cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1 & -\sin\sqrt{\lambda}2\pi \end{vmatrix} = 2(\cos\sqrt{\lambda}2\pi - 1) = 0$$

本征值

$$\lambda_m = m^2 \qquad m = 1, 2, 3, \cdots$$

对于一个本征值 λ_m，有两个本征函数

$$\Phi_{m1}(\phi) = \sin m\phi \qquad \Phi_{m2}(\phi) = \cos m\phi$$

由此可见，周期性边界条件给出了简并现象。将 $\lambda = 0$ 的结果和 $\lambda \neq 0$ 的结果合并起来，统一写成

$$\Phi_m(\phi) = e^{im\phi} \qquad m \in \mathrm{Z}$$

3. **求特解并叠加出一般解**

$$r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R = 0$$

这个径向方程被称为 Euler 方程，是一个变系数的方程。做自变量的变换

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \quad \text{即} \quad t = \ln r \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}t^2} - \lambda R = 0$$

- 当 $\lambda_0 = 0$ 时，通解为

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r$$

- 当 $\lambda_m = m^2, m \neq 0$ 时，通解为

$$R_m(r) = C_m e^{mt} + D_m e^{-mt} = C_m r^m + D_m r^{-m}$$

现在已求得满足齐次方程和齐次周期性边界条件的全部特解

$$\begin{aligned} u_0(r,\phi) &= C_0 + D_0 \ln r \\ u_{m1}(r,\phi) &= (C_{m1}r^m + D_{m1}r^{-m})\sin m\phi \\ u_{m2}(r,\phi) &= (C_{m2}r^m + D_{m2}r^{-m})\cos m\phi \end{aligned}$$

叠加得到一般解

$$u(r,\phi) = C_0 + D_0\ln r + \sum_{m=1}^{\infty}(C_{m1}r^m + D_{m1}r^{-m})\sin m\phi + \sum_{m=1}^{\infty}(C_{m2}r^m + D_{m2}r^{-m})\cos m\phi$$

4. **根据边界条件定叠加系数**

- 考虑在 $r = 0$ 点的有界条件

$$D_0 = 0 \qquad D_{m1} = 0 \qquad D_{m2} = 0$$

- 考虑边界条件 $u|_{r=a} = f(\phi)$

$$u(a,\phi) = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a^m(C_{m1}\sin m\phi + C_{m2}\cos m\phi) = f(\phi)$$

- 根据本征函数的正交归一性，得到叠加系数

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\mathrm{d}\phi \\ C_{m1} &= \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\sin m\phi \mathrm{d}\phi \\ C_{m2} &= \frac{1}{a^m\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cos m\phi \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

4.3 正交曲面坐标系下的 Helmholtz 方程

4.3.1 Helmholtz 方程在柱坐标系下的分离变量：$u=u(r,\theta,z)$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+k^2u=0$$

令 $u(r,\theta,z)=v(r,\theta)Z(z)$，可得

$$Z\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v\right]+v\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{1}{v}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+k^2v\right]=-\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\lambda$$

等式的左端是 r 和 θ 的函数，与 z 无关; 右端是 z 的函数，与 r 及 θ 均无关. 所以它们必须等于常数。把这个常数记为 λ。

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\theta^2}+\left(k^2-\lambda\right)v=0,\quad \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda Z=0$$

第一个方程事实上是一个二维形式的 Helmholtz 方程，再令 $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，继续分离变量

$$\Theta(\theta)\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]+\frac{R(r)}{r^2}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=0$$

$$\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda\right)R\right]=-\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}=\mu$$

最终得到三个常微分方程：

- Bessel 方程
$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0$$
- $$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2}+\mu\Theta=0$$
- $$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2}+\lambda Z=0$$

4.3.2 Helmholtz 方程在球坐标系下的分离变量：$u=u(r,\theta,\phi)$

$$\left(\nabla^2+k^2\right)u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2}+k^2u=0$$

令 $u(r,\theta,\phi)=R(r)Y(\theta,\phi)$

$$Y(\theta,\phi)\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]+\frac{R(r)}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=0$$

$$-\frac{1}{Y(\theta,\phi)}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]=\frac{r^2}{R(r)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+k^2R(r)\right]=\lambda$$

这样我们就将球面方向和径向方向分离变量，得到了两个方程

- 球 Bessel 方程
$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0$$

- 球面调和方程，它就是算子 $\mathbf{L}^2$ 的本征方程：

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}=\lambda Y(\theta,\phi)$$

令 $Y(\theta,\phi)=\Theta(\theta)\Phi(\phi)$：

$$\Phi\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]+\frac{\Theta}{\sin^2\theta}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=0$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\Theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta\right]=-\frac{1}{\Phi}\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}=\mu$$

这样就将经度方向和纬度方向分离变量，得到两个方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0,\qquad\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

小结：分离变量，得到三个常微分方程

- 球 Bessel 方程

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R(r)=0$$

- 连带 Legendre 方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

-

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2}+\mu\Phi=0$$

对于连带 Legendre 方程，一种常见特殊情形是 $u=u(r,\theta)$ ，而与 ϕ 无关，即整个定解问题在绕 z 轴转动任意角时不变，此时 Helmholtz 方程中对方位角 ϕ 的微分就可以被省略，或者说，令 $\mu=0$。令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，可得关于 $R(r)$ 的径向方程完全不变，而与极角 θ 有关的常微分方程，即连带 Legendre 方程的特殊形式，称为 **Legendre 方程**：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta=0$$

5 二阶线性常微分方程的幂级数解法

二阶线性齐次常微分方程的标准形式

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

其中，约定称 $p(z)$ 和 $q(z)$ 为方程的系数。

- 方程乃至方程的解是完全由方程的系数决定的。特别的，方程解的解析性是完全由方程系数的解析性决定的。
- 用级数解法解常微分方程时，得到的解的形式总是某一点 z_0 的邻域内的收敛无穷级数。
- $p(z)$ 和 $q(z)$ 在 z_0 的解析性就决定了级数解 $w(z)$ 在 z_0 的解析性，亦即级数解的形式，例如，是 Taylor 级数还是 Laurent 级数。

5.1 二阶线性常微分方程的常点和奇点

- 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 都在 z_0 解析，则 z_0 是方程的常点。
- 如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 至少有一个在 z_0 不解析，则 z_0 是方程的奇点。

Legendre 方程：

$$\left(1-z^2\right)\frac{d^2 y}{dz^2}-2z\frac{dy}{dz}+l(l+1)y=0$$

Legendre 方程的系数是

$$p(z)=-\frac{2z}{1-z^2} \qquad q(z)=\frac{l(l+1)}{1-z^2}$$

Legendre 方程在全平面有三个奇点：$z=\pm 1,\infty$（判断无穷远点 $z=\infty$ 是不是方程的奇点，必须做自变量变换 $z=\frac{1}{t}$）。

超几何方程：

$$z(1-z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+[\gamma-(1+\alpha+\beta)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}-\alpha\beta w=0$$

超几何方程的系数是

$$p(z)=\frac{\gamma-(1+\alpha+\beta)z}{z(1-z)} \qquad q(z)=-\frac{\alpha\beta}{z(1-z)}$$

超几何方程在全平面有三个奇点：$z=0,1,\infty$（判断无穷远点 $z=\infty$ 是不是方程的奇点，必须做自变量变换 $z=\frac{1}{t}$）。

5.2 二阶线性常微分方程常点邻域内的解

二阶线性常微分方程常点邻域内解的存在性定理：如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z-z_0|<R$ 内单值解析，则在此圆内下列常微分方程初值问题有唯一的解 $w(z)$，并且此解在圆内单值解析。

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$w\left(z_0\right)=c_0, \quad w'\left(z_0\right)=c_1$$

因此，$w(z)$ 在 $|z-z_0|<R$ 内可以被展开为 Taylor 级数

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\left(z-z_0\right)^k$$

其中 c_0 和 c_1 与初值条件一致，再用待定系数法求解。

5.2.1 Legendre 方程在常点邻域内的解

1. **定解问题**

$$\begin{cases}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)=0\\ u|_{\theta=0}\text{有界}\qquad u|_{\theta=\pi}\text{有界}\\ u|_{r=0}\text{有界}\qquad u|_{r=a}\text{有界}\end{cases}$$

令 $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$，将方程和边界条件分离变量：

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\Theta(\theta)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right)-\lambda R(r)=0$$

$$\Theta(0)\text{有界},\quad\Theta(\pi)\text{有界},\quad R(0)\text{有界},\quad R(a)\text{有界}$$

以下我们先关心极角部分的求解。

2. **本征值问题**

$$\begin{cases}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]+\lambda\Theta(\theta)=0\\ \Theta(0)\text{有界},\quad\Theta(\pi)\text{有界}\end{cases}$$

通常作变换 $z=\cos\theta,\,w(z)=\Theta(\theta)$，并且把待定参数 λ 写成 $l(l+1)$，相应的本征值问题就变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+l(l+1)w=0,\quad w(z=\pm1)\text{有界}$$

3. **Legendre 方程在 z = 0 附近：Taylor 级数解**

z = 0 是方程的常点，因此可令 $w=\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$，代入方程，就有：

$$\left(1-z^2\right)\sum_{k=2}^{\infty}c_kk(k-1)z^{k-2}-2z\sum_{k=1}^{\infty}c_kkz^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k=0$$

整理合并，得

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-l(l+1)]c_k\right\}z^k=0$$

根据 Taylor 展开的唯一性，可得展开系数之间的关系为

$$(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-l(l+1)]c_k=0$$

即给出了诸系数之间的递推关系

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k=\frac{(k-l)(k+l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k$$

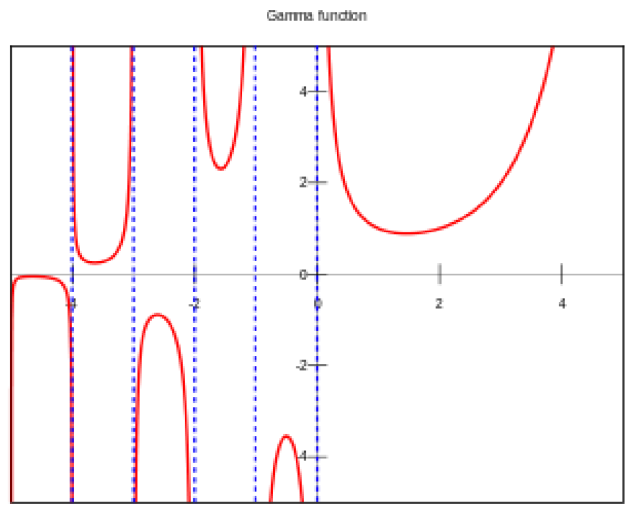
反复利用这一递推关系，有

$$c_{2n}=\frac{c_0}{(2n)!}(2n-l-2)(2n-l-4)\cdots(-l)\times(2n+l-1)(2n+l-3)\cdots(l+1)$$

利用 Γ 函数的性质（此处要特别小心！）

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$$

$$\Gamma(z+n+1)=(z+n)(z+n-1)\cdots(z+1)z\Gamma(z)$$



因此有

$$c_{2n} = \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} c_0$$

$$c_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)} c_1$$

Legendre 方程的通解具有形式 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$，其中

$$w_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+\frac{l+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1}{2}\right)} z^{2n}$$

$$w_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\Gamma\left(n-\frac{l-1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{l-1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(n+1+\frac{l}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{l}{2}\right)} z^{2n+1}$$

- Legendre 方程的两个线性无关的解在 $z = \pm 1$ 处都是对数发散的，这与我们所处理的定解问题中要求 Legendre 方程的解在 $\theta = 0 (z = 1)$ 和 $\theta = \pi (z = -1)$ 处有界是矛盾的。
- 通过某种 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 的线性组合，使得所得到的解在 $z = \pm 1$ 同时有界，换而言之，使得无穷大的发散性质相互抵消。
- 而只要 $w_1(z)$ 和 $w_2(z)$ 具有无穷级数的性质，它们的发散行为就不可能同时在 $z = \pm 1$ 抵消。
- 因此，要想求得有物理意义的收敛级数解，Legendre 方程的解必须退化为多项式。这就对参数 l 的取值提出了要求：l 为非负整数时，方程有且只有一个线性无关的特解，它是 w_1 或 w_2 中的一个，它被称为 l 阶 **Legendre 多项式**。

4. **总结：常点邻域内求级数解的一般步骤**

(a) 将方程在常点邻域内的解展开为 Taylor 级数，代入微分方程；

(b) 比较系数，得到系数之间的递推关系；

(c) 反复利用递推关系，求出系数 c_k 的普遍表达式（用 c_0 和 c_1 表示），从而最后得出级数解；

(d) 递推关系一定是线性的，因为方程是线性的，所以最后的级数解一定可以写成 $w(z) = c_0 w_1(z) + c_1 w_2(z)$ 的形式。

5.3 方程在正则奇点邻域内的解

5.3.1 方程在正则奇点邻域内的解

若 z_0 是方程的奇点，并且方程系数满足

- $p(z)$ 是不超过一阶的极点, 即 $(z-z_0)p(z)$ 在 z_0 解析；
- $q(z)$ 是不超过二阶的极点, 即 $(z-z_0)^2q(z)$ 在 z_0 解析。

则 z_0 是方程的正则奇点。

$$w_1(z)=(z-z_0)^{\rho_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-z_0\right)^k$$

$$w_2(z)=gw_1(z)\ln\left(z-z_0\right)+(z-z_0)^{\rho_2}\sum_{k=0}^{\infty}d_k\left(z-z_0\right)^k$$

这种形式的解被称为正则解，我们以下将重点分析这种形式解。正则解的特点在于它是截断的，反复利用递推关系，就可以求得解中系数的普遍表达式 (当然，还必须要定出 ρ 的取值)。

- 当 $g\neq 0$ 时，$w_2(z)$ 的形式和 $w_1(z)$ 不同 (含有对数项)，因而需分别求解。
- 当 $g=0$ 时，$w_2(z)$ 的表达式中不含对数项，两个解的形式相同。

二阶线性常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

在奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 有两个正则解的充分必要条件是 z_0 为方程的**正则奇点**。ρ_1 和 ρ_2 被称为正则解的指标，且 $\mathrm{Re}\left(\rho_1\right)\geq\mathrm{Re}\left(\rho_2\right)$。

5.3.2 正则解的指标方程

取

$$w(z)=(z-z_0)^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_k\left(z-z_0\right)^k,\quad c_0\neq 0$$

同时把 $p(z)$ 和 $q(z)$ 也在 $0<|z-z_0|<R$ 内作 Laurent 展开

$$p(z)=(z-z_0)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}a_k\left(z-z_0\right)^k,\quad q(z)=(z-z_0)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(z-z_0\right)^k$$

由于 $z=z_0$ 是方程的极点，故 m,n 为整数且至少有一个为正。

为了简单起见，不妨先设 $z=0$ 点是方程的正则奇点，在 $z=0$ 点的邻域内，可将方程的系数做 Laurent 展开

$$p(z)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^{l-1}\qquad q(z)=\sum_{l=0}^{\infty}b_lz^{l-2}$$

设方程的正则解为

$$w(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^k$$

代入原方程，有

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)(k+\rho-1)z^{k+\rho-2}+\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^{l-1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k(k+\rho)z^{k+\rho-1}+\sum_{l=0}^{\infty}b_lz^{l-2}\sum_{k=0}^{\infty}c_kz^{k+\rho}=0$$

并重新取定求和的赝指标：

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[c_k(k+\rho)(k+\rho-1)+\sum_{l=0}^{k}\left[a_l(k+\rho-l)+b_l\right]c_{k-l}\right]z^{k+\rho-2}=0$$

比较等式两端最低次幂，同时注意 $c_0 \neq 0$，就可得到指标方程

$$\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$$

其中

$$a_0=\lim_{z\to 0} zp(z),\quad b_0=\lim_{z\to 0} z^2 q(z)$$

根据指标方程可以求出两个指标 ρ_1 和 ρ_2。

再比较更高阶的 $z^{n+\rho-2}, n>0$ 的系数，得

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n+\sum_{l=0}^{n}\left[a_l(n+\rho-l)+b_l\right]c_{n-l}=0$$

这样便得出了系数之间的递推关系。反复利用递推关系，就可以得到系数 c_n 的普遍表达式。用 $\rho=\rho_1$ 代入，即可得到解 $w_1(z)$，再用 $\rho=\rho_2$ 代入，又可得到解 $w_2(z)$。

- 当 $\rho_1-\rho_2 \neq$ 整数 时，就求得了方程的两个线性无关的特解。
- 当 $\rho_1=\rho_2$ 时，显然这样只能得到同一个解。所以，这时第二解一定含对数项。
- 当 $\rho_1-\rho_2=$ 正整数m 时，对于第二解的系数，有

$$\sum_{l=1}^{m}\left[a_l\left(\rho_1-l\right)+b_l\right]c_{m-l}^{(2)}=0$$

5.3.3　正则解的指标方程：以 Legendre 方程为例

Legendre 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\left(1-z^2\right)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right]+l(l+1)w=0$$

- 在 $z=\pm 1$ 的邻域内求解 Legendre 方程。$z=\pm 1$ 是方程的正则奇点，方程在环域 $0<|z-1|<2$ 内有两个正则解。
- 计算可得 $a_0=1, b_0=0$，所以在 $z=1$ 的指标方程为

$$\rho(\rho-1)+\rho=0 \Rightarrow \rho_1=\rho_2=0$$

- Legendre 方程在 $z=1$ 点邻域内的第一解在圆域 $|z-1|<2$ 内解析，而第二解则一定含有对数项，以 $z=1$ 为枝点。

5.3.4　总结：正则奇点邻域内求解的一般步骤

1. 通过指标方程 $\rho(\rho-1)+a_0\rho+b_0=0$ 的解 ρ_1,ρ_2 判断方程的解的形式，例如解的解析性，第二解是否有对数项，等等。
2. 将正则解 $w_1(z)$ 或 $w_2(z)$ 代入方程。

3. 通过比较系数，求出指标和递推关系，进而求出系数的普遍表达式。

4. 实际的求解过程，总是先将 $w_1(z)$ 形式的解代入方程，如果能够同时求得两个线性无关解，当然任务便告完成，没有必要再将 $w_2(z)$ 形式的解代入方程。

5. 如果这时只能求得一个解 (例如 $\rho_1=\rho_2$ 时)，那么，就还必须再将 $w_2(z)$ 形式的解 (这时的 g—定不为 0) 代入方程求解。

5.4 Hermite 算子与 Sturm-Liouville 理论

5.4.1 Hermite 算子及其本征值

若算符 $\mathbf{L}$ 的伴算子就是它自身，即对于该函数空间内的任意两个函数 u 和 v 恒有 $\langle v|\mathbf{L}u\rangle=\langle\mathbf{L}v|u\rangle$ 成立，则 $\mathbf{L}$ 是**自伴算子**或**厄米算子**，即 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^\dagger$。

设 $\mathbf{L}$ 为自伴算符，则含参量 λ 的方程 $\mathbf{L}\,|y\rangle=\lambda\,|y\rangle$ 被称为自伴算符的本征值问题。

5.4.2 Sturm-Liouville 型方程的本征值问题

Sturm-Liouville 型方程的一般形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+[\lambda\rho(x)-q(x)]y=0$$

这里 $p(x)$、$q(x)$ 和 $\rho(x)$ 都是满足必要的连续性要求的实函数。$\rho(x)$ 被称为权函数。不恒为常数的权重函数来源于所涉问题的各种不均匀性。就我们所关心的物理问题而言，我们设 $\rho(x)\geq 0$ 且最多只在边界上为 0。

引入算符记号来改写 S-L 型方程：

$$\mathbf{L}\equiv-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+q(x)\quad\Rightarrow\quad\mathbf{L}y(x)=\lambda\rho(x)y(x)$$

S-L 型方程附加上适当的边界条件，就构成 S-L 型方程的本征值问题，λ 为本征值。对于某一个本征值 λ，满足 S-L 方程及相应的边界条件的非零解就是本征函数。

令 $u(x)=\sqrt{\rho(x)}y(x)$，得到 u(x) 满足权函数为 1 的 S-L 方程：

$$\mathbf{L}'u(x)=\lambda u(x)$$

则有

$$\mathbf{L}'=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\phi(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]+\psi(x),\quad\phi(x)=\frac{p(x)}{\rho(x)}$$

$$\psi(x)=-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right]+\frac{q(x)}{\rho(x)}$$

在下列情况下，算符 $\mathbf{L}'$ 是自伴的。

1. y_1 和 y_2 在两端点均满足第三类边界条件。

2. $p(a)=0$，这时 $x=a$ 点是方程的奇点。

3. 周期性边界条件。

5.4.3 Sturm-Liouville 型方程本征值问题的简并现象

简并是指对应一个本征值有不只一个线性无关的本征函数的现象。

就本课程所讨论的几种类型的边界条件而言，只有在周期性边界条件下才可能发生简并现象。

6 球函数

6.1 球函数的概念

Helmholtz 方程

$$\nabla^2 u + k^2 u = 0 \tag{1}$$

氢原子的 Schrödinger 方程

$$E\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\Psi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2\Psi + k^2(r)\Psi = 0 \tag{2}$$

在这些物理问题中，都有 $k^2 = k^2(r)$，即旋转对称性。分离变量下，有：$u = R(r)Y(\theta,\phi)$

- 径向
$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R\right) + \left[k^2(r) - \frac{\lambda}{r^2}\right]R(r) = 0 \tag{3}$$

- 角向
$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y = \lambda Y = \mathbf{L}^2 Y \tag{4}$$

不论径向的 $k^2(r)$ 具有何种形式，角方向的 $Y(\theta,\phi)$ 遵循的都是相同方程 (这就是我们研究球函数的原因)，这个方程是 $\mathbf{L}^2$ 的本征方程。

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{5}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{6}$$

即 $\mathbf{L}^2$ 是 $r=1$ 的单位球面上的 Laplace 算子的角向部分 $\times(-1)$。从物理上看，这是容易理解的——已知 $\vec{p} = -i\nabla$ 是动量算子，那么 $\nabla^2 = -\vec{p}^2 = -2m \times$ 动能，它的角向部分就是 $-2m \times$ (转动动能)。当 $r = 1$ 时，转动惯量 $M = mr^2 = m$，就有 ∇^2的角向部分 $= -\mathbf{L}^2$。

以下我们要讨论的问题是:

1. $\mathbf{L}^2$ 的本征值和本征函数是什么，具有何种性质?
2. $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2$ 可被视为一个定义在单位球面这一流形上的自伴算子。依照自伴算子的本征函数的正交性和完备性，我们如何实现任一定义在单位球面上的函数 $f(\theta,\phi)$ 的分解?
3. 相应的结果在电动力学静电场问题和量子力学有心势问题中的广泛应用。

6.2 角动量和旋转的关系

6.2.1 角动量算子

我们已经知道，在函数空间中，角动量算子是无穷小旋转操作的生成元，即

$$R_n(\theta) = \exp\left(-i\vec{L}\cdot\vec{n}\theta\right) \approx 1 - i\vec{L}\cdot\vec{n}\theta \quad (\theta \ll 1)$$

此处 $\vec{L} = \vec{R}\times\vec{p}$，$|\vec{n}| = 1$，$\vec{n}$ 表示转轴指向，θ 是转角。由此，我们可以求出 $\mathbf{L}_x$，$\mathbf{L}_y$，$\mathbf{L}_z$ 在球坐标下的表示

$$\mathbf{L}_x = i\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{7}$$

$$\mathbf{L}_y = i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{8}$$

$$\mathbf{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{9}$$

由此可见，$\mathbf{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi}$ 是厄米的，因为它配以的是周期性边界条件

$$U|_{\phi=0} = U|_{\phi=2\pi} \qquad \frac{\partial U}{\partial\phi}\Big|_{\phi=0} = \frac{\partial U}{\partial\phi}\Big|_{\phi=2\pi} \tag{10}$$

由于 z 轴在空间中并不具备优越性，因此 $\mathbf{L}_y$ 和 $\mathbf{L}_z$ 也一定是厄米的，从而 $\mathbf{L}^2 = \mathbf{L}_x^2 + \mathbf{L}_y^2 + \mathbf{L}_z^2$ 是正定厄米的。

当 $\theta \ll 1$ 时，作 Taylor 展开，即有

$$\begin{aligned} R_n^\dagger(\theta)R_n(\theta) =& \left(1 + i\vec{L}^\dagger\cdot\vec{n}\theta\right)\left(1 - i\vec{L}\cdot\vec{n}\theta\right) \\ =& 1 + i\left(\vec{L}^\dagger\cdot\vec{n} - \vec{L}\cdot\vec{n}\right)\theta - \theta^2 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\vec{L}^\dagger\cdot\vec{n} = \vec{L}\cdot\vec{n} \quad \Rightarrow \quad \vec{L}^\dagger = \vec{L} \tag{12}$$

6.2.2 角动量算子的基本对易关系

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{13}$$

6.3 角动量算子的谱

$$\mathbf{L}_x = i\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{14}$$

$$\mathbf{L}_y = i\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \sin\phi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \tag{15}$$

$$\mathbf{L}_z = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \tag{16}$$

$$\mathbf{L}^2 = -\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{17}$$

球函数是 $\mathbf{L}^2$ 和 $\mathbf{L}_z$ 的共同本征函数，即球函数是下列自伴算子本征值问题的解：

$$\mathbf{L}^2\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle \qquad \mathbf{L}_z\left|\psi\right\rangle = m\left|\psi\right\rangle$$

从数学上讲，$\mathbf{L}^2\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$ 是分离掉 r 后我们得到的本征方程，而 $\mathbf{L}_z\left|\psi\right\rangle = m\left|\psi\right\rangle$ 对应于

$$-i\frac{\partial}{\partial\phi}\psi(\boldsymbol{r}) = m\psi(\boldsymbol{r})$$

这正对应于 $\mathbf{L}^2\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle$ 进一步分离变量得到的关于 ϕ 的方程

$$-\frac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\phi^2} = \mu\Phi$$

使用 L_x 和 L_y 的线性组合

$$\mathrm{L}_+ \equiv \mathrm{L}_x + i\mathrm{L}_y \qquad \mathrm{L}_- \equiv \mathrm{L}_x - i\mathrm{L}_y$$

它们分别被称作角动量的升算子和降算子。

以下的推导中，我们不再使用 $\mathrm{L}_x, \mathrm{L}_y$，而只运用 $\mathrm{L}^2, \mathrm{L}_z, \mathrm{L}_+, \mathrm{L}_-$，为此，我们计算如下对易关系：

$$[\mathrm{L}_z, \mathrm{L}_+] = [\mathrm{L}_z, \mathrm{L}_x + i\mathrm{L}_y] = i\mathrm{L}_y + \mathrm{L}_x = \mathrm{L}_+$$
$$[\mathrm{L}_z, \mathrm{L}_-] = [\mathrm{L}_z, \mathrm{L}_x - i\mathrm{L}_y] = i\mathrm{L}_y - \mathrm{L}_x = -\mathrm{L}_-$$
$$[\mathrm{L}_+, \mathrm{L}_-] = [\mathrm{L}_x + i\mathrm{L}_y, \mathrm{L}_x - i\mathrm{L}_y] = 2\mathrm{L}_z$$

设有 L_z 的一个本征函数 $|\psi\rangle$

$$\mathrm{L}_z |\psi\rangle = m |\psi\rangle$$

$$\mathrm{L}_z[\mathrm{L}_+ |\psi\rangle]$$

Lemma 1: $\mathbf{L}^2$ 和 $\mathbf{L}_z$ 的本征值的性质：设 $l(l+1)$ 和 m 是 $|k,l,m\rangle$ 对应于 $\mathbf{L}^2$ 和 $\mathbf{L_z}$ 的本征值，则有 $-l \le m \le l$。

6.4 角动量算子的本征函数：球谐函数

$$\left[\nabla^2 + k^2(r)\right] u = 0 \qquad \begin{cases} \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left[k^2(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R = 0 \\ \mathbf{L}^2 \mathrm{Y}_l^m(\theta,\phi) = 0 \end{cases}$$

$$|C_l| = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

要完全确定 C_l，我们按照惯例取相位

$$C_l = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}$$

$$Y_l^l(\theta,\phi) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)!}{4\pi}}(\sin\theta)^l e^{il\phi}$$

$2l+1$ 个球谐函数 $Y_l^m(\theta,\phi)$

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{im\phi}(\sin\theta)^m \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l+m}}(\sin\theta)^{2l}$$

- $l = 1 \qquad \mathbf{L}_x = \mathbf{L}_y = \mathbf{L}_z = 0 \qquad Y_0^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
- $l = \frac{1}{2}$ 　　对应于电子自旋的 Pauli 矩阵。
- $l = 1 \qquad \dim = 2l+1 = 3 \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \qquad Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{\pm i\phi}$

6.5 球函数的一般表达式

球函数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 是自伴算子本征值问题

$$\begin{cases} \mathbf{L}^2 |l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle \\ \mathbf{L}_z |l,m\rangle = m|l,m\rangle \end{cases}$$

的对应于本征值数组 (l,m) 的无简并的本征函数。

6.5.1 用 L 作用于 $Y_l^l(\theta,\phi)$ 得到 $Y_l^m(\theta,\phi)$

算子 $(\mathbf{L}_\pm)^p$ 对形如 $F(\theta)e^{in\phi}$ 的函数的作用

$$(\mathbf{L}_\pm)^p\left[e^{in\phi}F(\theta)\right]=(\mp 1)^p e^{i(n\pm p)\phi}\,(\sin\theta)^{p\pm n}\,\frac{\mathrm{d}^p}{\mathrm{d}(\cos\theta)^p}\left[(\sin\theta)^{\mp n}F(\theta)\right]$$

由

$$\mathbf{L}_\pm Y_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{l(l+1)-m(m\pm 1)}Y_l^{m\pm 1}(\theta,\phi)=\sqrt{(l\pm m+1)(l\mp m)}Y_l^{m\pm 1}(\theta,\phi)$$

有

$$(\mathbf{L}_-)^{l-m}\,Y_l^l(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}}Y_l^m(\theta,\phi)$$

即

$$\begin{aligned}Y_l^m(\theta,\phi)&=\sqrt{\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!}}\,(\mathbf{L}_-)^{l-m}\,Y_l^l(\theta,\phi)\\&=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}e^{im\phi}(\sin\theta)^{-m}\frac{\mathrm{d}^{l-m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l-m}}(\sin\theta)^{2l}\\&=\frac{(-1)^{l+m}}{2^l l!}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}e^{im\phi}(\sin\theta)^{m}\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l+m}}(\sin\theta)^{2l}\end{aligned}$$

6.5.2 $Y_l^m(\theta,\phi)$ 的本质是多项式函数

在球坐标下，我们对 Laplace 方程分离变量得到三个常微分方程：

- 方位角

$$-\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_l^m(\theta,\phi)=m^2Y_l^m(\theta,\phi)\quad \text{即}\quad \mathbf{L}_zY_l^m(\theta,\phi)=mY_l^m(\theta,\phi)$$

- 方位角 + 极角

$$-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}Y_l^m(\theta,\phi)\right]-\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}Y_l^m(\theta,\phi)=l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi)$$

  即

$$\mathbf{L}^2Y_l^m(\theta,\phi)=l(l+1)Y_l^m(\theta,\phi)$$

- 径向

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{1}{r^2}l(l+1)R=0$$

方位角和极角所对应的方程给出自伴算子的本征值，特征函数就是球谐函数 $Y_l^m(\theta,\phi)$，而径向方程的解法是：这一方程是一个 Euler 型方程

$$r^2R''+2rR'-l(l+1)R=0$$

令 $R=r^v$，有

$$v(v-1)+2v=l(l+1)$$

$$v_1=l\qquad\qquad v_2=-l-1$$

由于 $l\geq 0$ 为整数，如此我们即对任一确定的 l，求出了径向方程的两个通解：r^l 和 $r^{-(l+1)}$。

如此就有 Laplace 方程通解的一般形式：

$$\boxed{u=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_l^m(\theta,\phi)\left[a_{l,m}r^l+b_{l,m}r^{-(l+1)}\right]}$$

例：半径为 r_0 的球形区域内部无电荷，球面上的电势是 $U_0\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi=\frac{1}{2}U_0\sin^2\theta\sin 2\phi$，求内部的电势分布。

解:

$$U_\Sigma=\sum_{l,m}a_{l,m}r_0^lY_l^m(\theta,\phi)=\frac{1}{4i}U_0\sin^2\theta\left(e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}\right)$$

而

$$Y_2^{\pm2}(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta e^{\pm2i\phi}$$

则

$$U_\Sigma=\frac{1}{4i}U_0\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\left[Y_2^2(\theta,\phi)-Y_2^{-2}(\theta,\phi)\right]$$

$$a_{2,2}=\frac{1}{4ir_0^2}U_0\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\qquad a_{2,-2}=\frac{-1}{4ir_0^2}U_0\sqrt{\frac{32\pi}{15}}$$

故

$$U=\frac{r^2}{4ir_0^2}U_0\sin^2\theta\left(e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}\right)$$

分解要点:

1. 先看 $f(\theta,\phi)$ 对 ϕ 的依赖，即先做

   $$f(\theta,\phi)=\sum_m f_m(\theta)e^{im\phi}$$

   的分解，对应于例子就是

   $$\sin 2\phi=\frac{1}{2i}\left(e^{i2\phi}-e^{-i2\phi}\right)$$

2. 再看 $f_m(\theta)$：这是一个关于 θ 的函数。此时，我们就只要考虑 $Y_l^m(\theta,\phi)$ $(l\geq|m|)$。此时我们定义 m 阶 l 次连带 Legendre 函数 $P_l^m(\cos\theta)$ 为

   $$P_l^m(\cos\theta)=\frac{(-1)^l}{2^l l!}(\sin\theta)^m\frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}(\cos\theta)^{l+m}}(\sin\theta)^{2l}$$

例：半径为 r_0 的球形区域外部无电荷，球面上的电势 $f(\theta,\phi)$ 已知，求外部的电势分布。

解：通解

$$U=\sum_{l,m}Y_l^m(\theta,\phi)\left[a_{l,m}r^l+b_{l,m}r^{-(l+1)}\right]$$

此时电荷分布聚集在有限区域，它们在无穷远处产生的电势一定是零，此时我们取无穷远为电势零点，利用 U_∞ 有界为 0，可以去除 U 中所有的 r^l $(l\geq0)$ 项，从而有

$$U=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_l^m(\theta,\phi)\left[b_{l,m}r^{-(l+1)}\right]$$

边界条件给出

$$f(\theta,\phi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y_l^m(\theta,\phi)\left[b_{l,m}r_0^{-(l+1)}\right]$$

分解 $f(\theta,\phi)$，逐项比对系数，即可得到 $b_{l,m}$

例：内、外径为 r_1, r_2 的球壳区域内部无电荷，球壳上的电势为 $U_{r_1} = f(\theta, \phi), U_{r_2} = g(\theta, \phi)$，求球壳间的电势分布。

解：此时正幂和负幂都不能舍去，而应从

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi)\left[a_{l,m} r_1^l + b_{l,m} r_1^{-(l+1)}\right]$$

$$g(\theta, \phi) = \sum_{l,m} Y_l^m(\theta, \phi)\left[a_{l,m} r_2^l + b_{l,m} r_2^{-(l+1)}\right]$$

联立解出 $a_{l,m}$ 和 $b_{l,m}$。

6.6 球函数与 Legendre 多项式

6.6.1 Legendre 多项式的定义

连带 Legendre 方程在 $m = 0$ 时，即绕 z 轴旋转不变时，即为 Legendre 方程，它的解是 Legendre 多项式。$m = 0$ 时

$$\begin{aligned} Y_l^0(\theta, \phi) = Y_l^0(\theta) &= \frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}(\cos\theta)^l}\left(1 - \cos^2\theta\right)^l \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta) \end{aligned}$$

其中

$$P_l(u) = \frac{(-1)^l}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}u^l}(1-u^2)^l$$

这是 Legendre 多项式的 Rodrigues 公式定义。

- $P_0(x) = 1$
- $P_1(x) = x$
- $P_2(x) = \frac{1}{2}(-1 + 3x^2)$

6.6.2 Legendre 多项式的应用：具有轴对称特性的 Laplace 方程的求解问题

当绕 z 轴旋转不变时，$m = 0$，即通解

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^m(\theta, \phi)\left[a_{l,m} r^l + b_{l,m} r^{-(l+1)}\right]$$

化为

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left[c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}\right]$$

例：均匀电场中的导体球：设在电场强度 E_0 的均匀电场中放入一个接地导体球，球的半径为 a，求球外任何一点的电势。

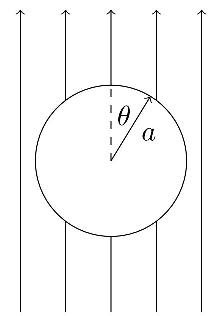
$$\text{Solution}: \quad \begin{cases} U_{\text{内}} = 0 \\ U_{\text{外}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left[c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}\right] \end{cases}$$

电势

$$U = U_1 + U_2$$

$$U_1 = -E_0 r\cos\theta + U_0$$

其中 U_1 是未放导体球时的电势，U_2 是感应电荷贡献的电势，U_0 是放球前原点的电势



- 在球面上

$$U = 0 = U_1 + U_2 \;\Rightarrow\; U_2 = -U_0 + E_0 a\cos\theta \tag{18}$$

- 在无穷远处 $U_2 = 0$，故

$$U_2 = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\left[c_l r^l + d_l r^{-(l+1)}\right] \tag{19}$$

通解中的 r^l 项要被丢掉

$$U_2 = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) d_l r^{-(l+1)} \tag{20}$$

因此在 $r=a$ 处，有

$$U_2(r=a) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta) d_l a^{-(l+1)} = -U_0 + E_0 a\cos\theta \tag{21}$$

逐项比对系数，有

$$\begin{aligned} d_0\cdot 1\cdot\frac{1}{a} &= -U_0 & \Rightarrow\quad & d_0 = -aU_0 \\ d_1\cdot\cos\theta\cdot\frac{1}{a^2} &= E_0 a\cos\theta & \Rightarrow\quad & d_1 = E_0 a^3 \end{aligned} \tag{22}$$

则

$$U_2 = E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta - U_0\frac{a}{r} \tag{23}$$

由此可得

$$U = -E_0 r\cos\theta + E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta + U_0 - U_0\frac{a}{r} \tag{24}$$

球面上的净余电荷是多少？为此我们来看 $U_2 = -U_0\frac{a}{r} + E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$ 的物理含义

1. 第一项 $-U_0\frac{a}{r}$
   表示一个点电荷在球外的电势贡献，它的出现来自于原来的电场中 $r=0$ 处不是电势零点，但加入了导体球后，导体球面的感应电荷就讲 $r=0$ 变成了电势零点，即

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} = -U_0 \;\Rightarrow\; Q = -U_0\cdot 4\pi\varepsilon_0 a \;\Rightarrow\; U_{\text{ind}} = -U_0\frac{a}{r} \tag{25}$$

2. 第二项 $E_0\frac{a^3}{r^2}\cos\theta$
   原点处一个电偶极子 $\vec{P}$ 产生的电势正是

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^2}$$

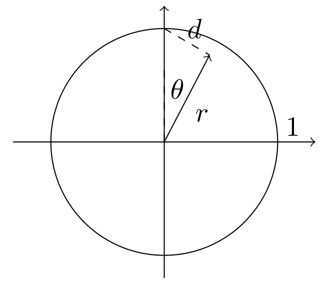
   这表明了球面上的感应电荷的分布是不均匀的，在去掉了净余总电荷 $-U_0\cdot 4\pi\varepsilon_0 a$ 时，球就是宏观电中性的，相应的正负电荷分布就好像产生了一个 $4\pi\varepsilon_0 E_0 a^3$ 大小的电偶极矩一般。

3. 球面梯度公式

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\phi}\hat{r}_\phi$$

   可见第二项求取 $E = -\nabla U$，就有 $E_r \sim \frac{1}{r^3}$。再运用 Gauss 定理，取 Gauss 球的半径为无穷大，可知电通量的计算中，e_θ 和 e_ϕ 是无贡献的，而 e_r 的贡献必为 0。因此，球面上净余电荷的贡献一定是由第一项 $-U_0\frac{a}{r}$ 给出的，$E = -\nabla U \sim \frac{1}{r^2}$，运用 Gauss 定理即得到有限的净余电荷。

6.6.3 Legendre 多项式的生成函数



Legendre 多项式的引入是在电势论的研究中引入的。

在单位球的北极处放置一个大小为 $4\pi\varepsilon_0$ 的正电荷，那么，在球内，电场即具有绕 z 轴的旋转对称性。在球内 (r,θ,φ) 点，电势为

$$U(r,\theta,\varphi)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 d}=\frac{1}{d}=\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} \tag{26}$$

但是，依照 Laplace 方程在轴对称问题中的求解

$$U=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)\left[A_l r^l+B_l r^{-(l+1)}\right] \tag{27}$$

在球内电势有限，即有

$$U=\sum_{l=0}^{\infty}P_l(\cos\theta)A_l r^l \tag{28}$$

在北极轴上 $\cos\theta=1$，即有

6.6.4 Legendre 多项式的递推关系

6.6.5 球函数的加法定理和电场的多极矩展开

Theorem: 考虑空间中的任意两个方向角 (θ',φ') 和 (θ'',φ'')，而 α 表示这两个方向的夹角，则有

$$\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\alpha)=\sum_{m=-l}^{l}(-1)^m Y_l^m(\theta',\varphi')Y_l^{-m}(\theta'',\varphi'') \tag{29}$$

Proof: 视 $\alpha=\alpha(\theta',\theta'',\varphi',\varphi'')$ 为 $(\theta',\varphi'),(\theta'',\varphi'')$ 的四元函数，于是，按照球函数的完备性，即有

$$\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\alpha)=\sum_{l',m'}\sum_{l'',m''}c_{l'm'}c_{l''m''}Y_{l'}^{m'}(\theta',\varphi')Y_{l''}^{m''}(\theta'',\varphi'') \tag{30}$$

问题就在于如何计算系数 $c_{l'm'},c_{l''m''}$。首先证明 $l'=l''=l$

加法定理的一个应用是静电场的多极矩展开：在有限区域中存在电荷，其在远处的电场可以用电多极子来展开：

$$\begin{aligned}
U(r,\theta,\varphi)&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\frac{\rho(\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\frac{\rho(\vec{r}_0)}{\sqrt{r^2+r_0^2-2r_0 r\cos\alpha}}\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\frac{\rho(\vec{r}_0)}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{r}\right)^2-2\frac{r_0}{r}\cos\alpha}}\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\rho(\vec{r}_0)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^l P_l(\cos\alpha)\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\rho(\vec{r}_0)\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^l\sum_{m=-l}^{l}\frac{4\pi}{2l+1}(-1)^m Y_l^m(\theta_0,\varphi_0)Y_l^{-m}(\theta,\varphi)\\
&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int \mathrm{d}^3\vec{r}_0\rho(\vec{r}_0)r_0^l Y_l^m(\theta_0,\varphi_0)\frac{4\pi}{2l+1}(-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\varphi)r^{-l+1}
\end{aligned} \tag{31}$$